WS2009/2010
BAI1-MG
Klausurspicker

R. C. Ladiges

28. Januar 2010

Mengen

$A=B \quad \forall a\in A: a\in B \wedge \forall b\in B: b\in A$ | $A\neq B \quad \exists a\in A: a\notin B \vee \exists b\in B: b\notin A$ | $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ | $P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$A\subseteq B \quad \forall a\in A: a\in B$ | $A\subset B \quad \forall b\in B: b\in A \wedge \exists a\in A: a\notin B$ | $P(\{a,b\})=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ | $|P(M)|=2^{|M|}$

$A\cup B=\{x\mid x\in A \vee x\in B\}$ | $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$ | $A\setminus B=\{x\mid x\in A \wedge x\notin B\}$ | $\overline{A}=G\setminus A$ | $A^2=A\times A$

$A\uplus B=(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$ | $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$ (Kombinationen) | $A\times\emptyset=\emptyset$ | $A\uplus\emptyset\cong A$ | $A\uplus B\cong A\cup B$ wenn $A\cap B=\emptyset$

Relationen

$aRb=(a,b)\in R\subseteq A\times B$ | $\{(b,c)\}\circ\{(a,b)\}=\{(a,c)\}$ | ● = ÄR | ⊖ = HO (Halbordnung) | ⊖∧O = TO (totale Ordnung) | $t(s(r(R)))=ÄR$

●⊖ reflexiv $\forall a\in A: (a,a)\in R$ | ● symmetrisch $(a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R$ | ⊖ antisymmetrisch $(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\rightarrow a=b$

●⊖ transitiv $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\rightarrow(a,c)\in R$ | total O $(a,b)\in R\vee(b,a)\in R$ | irreflexiv $\forall a\in A: (a,a)\notin R$ | $[a]=\{x\mid(a,x)\in R\}$

asymmetrisch $(a,b)\in R\rightarrow(b,a)\notin R$ | alternativ $(a,b)\in R\ \dot\vee\ (b,a)\in R$ | eindeutig = rechts- und linkseindeutig

rechtseindeutig $(a,b)\in R\wedge(a,c)\in R\rightarrow b=c$ | linkseindeutig $(b,a)\in R\wedge(c,a)\in R\rightarrow b=c$ | $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$

linkstotal $\forall a\in A:\exists b\in B: (a,b)\in R$ | rechtstotal $\forall b\in B:\exists a\in A: (a,b)\in R$ | $R=Id:=\{(x,x)\mid x\in M\}$

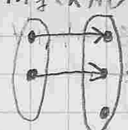
Abbildungen

$f: A\rightarrow B \quad a\mapsto f(a)$ linkstotal und rechtseindeutig (Urbild → Bild)

$(g\circ f=h\circ f)\rightarrow(g=h)\leftarrow(f\circ g=f\circ h)$ | $f^{-1}: B\rightarrow A$

$id_A=f^{-1}\circ f$ | $id_B=f\circ f^{-1}$ | Einschränkung $C\subseteq A \quad f|_C: C\rightarrow B \quad c\mapsto f(c)$

injektiv (linkseindeutig)

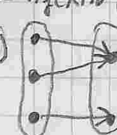


$a_1\neq a_2\rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$

$f(a_1)=f(a_2)\rightarrow a_1=a_2$

max 1 (0 ∨ 1)

surjektiv (rechtstotal)



$\forall b\in B:\exists a\in A: b=f(a)$

min 1 (1, …, n)

Kern: $Ker(f)=\{(a_1,a_2)\in A\times A\mid f(a_1)=f(a_2)\}$ ÄR | $\mathbb{N}_n:=\{1,\ldots,n\}$

Mächtigkeit v. Mengen

endlich $M=\emptyset \vee \exists n\in\mathbb{N}: f_{bij}: M\rightarrow\mathbb{N}_n$ | unendlich = nicht endlich M | abzählbar M endlich $\vee \exists f_{bij}: M\rightarrow\mathbb{N}$

abzählbar unendlich: M abzählbar ∧ M unendlich | überabzählbar: M nicht abzählbar

Logik

Negation

A	¬A
0	1
1	0

NOT

Konjunktion

A	B	A∧B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

Disjunktion

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

Antivalenz

A	B	A$\dot\vee$B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

Implikation

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\neg A\vee B$

Äquivalenz

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A\rightarrow B \wedge B\rightarrow A$ NXOR

$A\wedge(A\vee B)=A=A\vee(A\wedge B)$

$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$

$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$

Beweise

$\frac{\neg A\rightarrow false}{A}$ Widerspruch | $\frac{A\rightarrow B,\ \neg A\rightarrow B}{B}$ Fallunterscheidung | $\frac{A\rightarrow B,\ A}{B}$ Modus Ponens | $\frac{A\rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$ | $\frac{A\rightarrow B,\ B\rightarrow C}{A\rightarrow C}$ Beweiskette | $\frac{\neg B\rightarrow\neg A}{A\rightarrow B}$ Kontraposition | $\frac{A\rightarrow B,\ B\rightarrow A}{A\leftrightarrow B}$ Äquivalenz | $\frac{A\rightarrow B,\ A\rightarrow C}{A\rightarrow(B\wedge C)}$ | $\frac{[A],B}{A\rightarrow B}$ Konditional

$\exists a\in A: f(a)$ = mind. 1 $a\in A$ für den $f(a)$ wahr | $\forall a\in A: f(a)$ = für alle $a\in A$ ist $f(a)$ wahr | $\exists! = \exists a: f(a)\wedge\forall b: b\neq a\wedge\neg f(b)$

$\neg[\exists a\in A: f(a)]=\forall a\in A:\neg f(a)$ | $\neg[\forall a\in A: f(a)]=\exists a\in A:\neg f(a)$ | $\frac{\neg f(a)}{\neg\forall a: f(a)}$ | IA: $A(1)$ IB: $A(n)$ IS: $A(n)\rightarrow A(n+1)$ IB verwenden

Vektoren und Matrizen

$\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ | $c\cdot\vec{a}=(c\cdot a_1,c\cdot a_2,\ldots,c\cdot a_n)$ | $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$ | $0\cdot\vec{a}=\vec{0}=(0,0,\ldots)$

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ (parallel) wenn $\vec{a}=c\cdot\vec{b}$ | $\vec{X}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ Gerade | $\neg\exists\lambda: \vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$ unabhängig | $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: \lambda\vec{a}=\mu\vec{b}$ abhängig | $\vec{X}=\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ Ebene | $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i$

$|\vec{a}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ | $d(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}-\vec{a}|$ Abstand, Distanz | $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ | $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$, wenn $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=0$ Orthogonalität | Matrix $A:=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ | $A^T:=(a_{jk})^T=a_{kj}$

$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}+b_{m1}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$ | $c\cdot A=\begin{pmatrix}c\cdot a_{11}&\cdots&c\cdot a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ c\cdot a_{m1}&\cdots&c\cdot a_{mn}\end{pmatrix}$ | $C=A\cdot B \mid c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$ | $-A=-(a_{jk})$

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Monoide, Gruppen, Körper, Gleichungssysteme

$(M,\circ)$ Monoid, wenn $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (assoziativ) und $e\cdot x=x\cdot e=x$ (neutrales Elem.) | $(\mathbb{N}_0,+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ $e=0$ | $(\mathbb{N}_0,\cdot),(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{Q},\cdot),(\mathbb{R},\cdot)$ $e=1$

$(G,\circ)$ Gruppe, wenn $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$ | $(K,+,\cdot)$ Körper, wenn $a+b=b+a\ (e=0)\wedge a\cdot b=b\cdot a\ (e=1)\wedge a\cdot(b+c)=ab+ac$

$v=k_1\cdot v_1+\ldots+k_n\cdot v_n$ Linearkombination | $\exists\vec{v}_i\in\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$: $\vec{v}_i$ ist Linearkombi der anderen | Vektorfamilie $(v_1,\ldots,v_n)$ = Erzeugendensystem, wenn jeder Vektor $\vec{a}\in K^n$ als Linearkombi darstellbar

Vektorfamilie = Basis, wenn Erzeugendensystem ∧ Vektoren linear unabhängig voneinander | $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$

inhomogen: $\exists i: b_i\neq0$ | homogen: $\vec{b}=\vec{0}$ | $\begin{pmatrix}0&x&\bullet&\bullet\\0&0&x&\bullet\\0&0&0&x\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $0=0$, $x\neq0$, $\bullet$ = beliebig: Zeilenstufenform | homogene Lösungen: trivial = Nullvektor, mehrere = freie Vari. | inhomogen: trivial, mehrere, keine z.B.: $(0\,0\,0\mid1)$

Kombinatorik

$0!=1 \quad n!=\prod_{i=1}^{n}i \quad n!=(n-1)!\cdot n$ | $(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}=\{0$, wenn $k>n$; $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ | k = Ziehungen n = Möglichkeiten

k aus n	Reihenfolge	egal
Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$
ohne WDH	$(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

n aus n	Permutation
ohne	$n!$
Gleiche	$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$

$n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

$P(A)=0..1$ Wahrscheinlichkeit Ereignis A

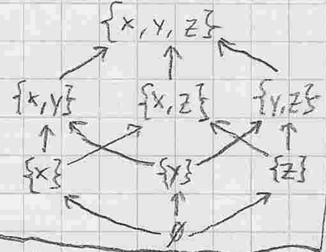
$P(B\setminus A)=P(B)-P(A) \quad P(\overline{A})=1-P(A) \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Formel von Bayes: $P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_i P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$

$\frac{1}{2}\ A \quad \frac{1}{2}\ B$

Hasse-Diagramm für $P(\{x,y,z\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$



IA: $(n=1)$: Es ist $|M_0 \times M_1| = |M_0| \cdot |M_1|$. Denn ist $v \in M_1$, so gibt es genau $|M_0|$ Paare (x, v), so dass an der 1. Stelle ein beliebiges $x \in M_0$ und an der 2. v steht. Dies gilt für jedes $v \in M_1$, also ist
$|M_0 \times M_1| = \sum_{v \in M_1} |M_0 \times \{v\}| = |M_0| \cdot |M_1|$.

$$\left|\bigtimes_{i=0}^{n} M_i\right| = \prod_{i=0}^{n} |M_i|$$

IB: Sei $|M_0 \times \dots \times M_n| = |M_0| \cdot \ldots \cdot |M_n|$

IS: $|M_0 \times \dots \times M_{n+1}| = |(M_0 \times \dots \times M_n) \times M_{n+1}| \overset{IA}{=} |M_0 \times \dots \times M_n| \cdot |M_{n+1}| \overset{IB}{=} |M_0| \cdot \ldots \cdot |M_n| \cdot |M_{n+1}|$

$$\left|\biguplus_{i=0}^{n} M_i\right| = \sum_{i=0}^{n} |M_i|$$

IA: $(n=1)$ Es ist $|M_0 \uplus M_1| = |M_0| + |M_1|$. Es gilt $|M_0 \uplus M_1| = |M_0 \times \{0\} \cup M_1 \times \{1\}| = |M_0| + |M_1|$, denn $|M_0 \times \{0\}| = |M_0|$ und $|M_1 \times \{1\}| = |M_1|$ und $M_0 \times \{0\} \cap M_1 \times \{1\} = \emptyset$

IB: Sei $|M_0 \uplus \dots \uplus M_n| = |M_1| + \dots + |M_n|$.

IS: $(n \to n+1)$: $|M_0 \uplus \dots \uplus M_{n+1}| = |(M_0 \uplus \dots \uplus M_n) \uplus M_{n+1}| \overset{IA}{=} |M_0 \uplus \dots \uplus M_n| + |M_{n+1}| \overset{IB}{=} |M_0| + \dots + |M_{n+1}|$.

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

$n \in \mathbb{N}_0 \land x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \land x > (-1)$

IA: $(n=0)$ $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0 = 1 + 0 \cdot x$

IB: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

IS: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{IB}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x + 0 = 1 + (n+1)x$

$(n-1)! \cdot n = n!$ $\quad n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ $\quad (n-k)! \cdot (n-k+1) = (n-k+1)!$

$$\frac{(m+n+1)!}{n!\,(m+1)!} + \frac{(m+n+1)!}{(n+1)!\,m!} = \frac{(m+n+1)! \cdot (n+1)}{(n+1)!\,(m+1)!} + \frac{(m+n+1)! \cdot (m+1)}{(n+1)!\,(m+1)!} = \frac{(m+n+1)! \cdot (m+n+2)}{(n+1)!\,(m+1)!} = \frac{(m+n+2)!}{(n+1)!\,(m+1)!} = \binom{m+n+2}{n+1}$$

Fakultät $0! = 1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = 40.320$; $9! = 362.880$
$10! = 3.628.800$; $11! = 39.916.800$; $12! = 479.001.600$; $13! = 6.227.020.800$

Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2584, 4181, 6765, 10.946, 17.711, 28.657

Schweinegrippe

T = Test

+ positiv − negativ

1) Rate der Population $= 0{,}1\%$ $\rightarrow p(H) = 0{,}001$ (erkrankt), $P(G) = 0{,}999$ (gesund)

2) Test: wenn $p(H)$, dann Test 90% entdeckt $\rightarrow p(T+|H) = 0{,}9$, $p(T-|H) = 0{,}1$

3) Gesunde zu 1% falscher Test (positiv statt negativ) $\rightarrow p(T-|G) = 0{,}99$, $p(T+|G) = 0{,}01$

richtig-positiv: $p(H) \cdot p(T+|H) = 0{,}001 \cdot 0{,}9 = 0{,}0009$

falsch-negativ: $p(H) \cdot p(T-|H) = 0{,}001 \cdot 0{,}1 = 0{,}0001$

falsch-positiv: $p(G) \cdot p(T+|G) = 0{,}999 \cdot 0{,}01 = 0{,}00999$

richtig-negativ: $p(G) \cdot p(T-|G) = 0{,}999 \cdot 0{,}99 = 0{,}98901$

positives Ergebnis bei echter Infektion:

$$p(H|T+) = \frac{p(T+|H) \cdot p(H)}{p(T+|H) \cdot p(H) + p(T+|G) \cdot p(G)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}001}{0{,}9 \cdot 0{,}001 + 0{,}01 \cdot 0{,}999} = \frac{0{,}0009}{0{,}01089} = 0{,}0826 \Rightarrow 8{,}26\%$$

Lotto: $\binom{49}{6}$

Pascalsches Dreieck $\binom{n}{k}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$2^n > n^3$ für $n \geq 10$

IA: $(n=10)$ $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$

IB: $2^n > n^3$ für $n \geq 10$

IS: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{IB}{>} 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3$
$= n^3 + n \cdot n^2 > n^3 + 7 \cdot n^2 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 1n^2$
$> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

$P(A|B)$ = A unter Bedingung B

ATTENTAT = Permutation mit Gleichen

$n_1 = A = 2$; $n_2 = T = 4$; $n_3 = E = 1$; $n_4 = N = 1$

$$\frac{8!}{2!\,4!\,1!\,1!} = \frac{8!}{2!\,4!} = 840$$

Informationen zur Signatur

Unterzeichner	EMAILADDRESS=robin.ladiges@haw-hamburg.de, CN=Robin Christopher Ladiges
Datum/Zeit	Wed Jan 26 18:26:43 CET 2011
Austeller-Zertifikat	CN=CAcert Class 3 Root, OU=http://www.CAcert.org, O=CAcert Inc.
Serien-Nr.	44727
Methode	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signatur)