Übungsaufgaben Vorkurs Mathematik
Blatt7

3. Aufgaben zum Thema trigonometrische Funktionen

32. Rechnen Sie folgende Winkel in Gradmaß bzw. in Bogenmaß um:
    a) 0,03624rad b) 0,27110rad c) 1,55003rad d) 2,94325rad e) 10rad
    f) $38°24'30''$ g) $164°35'18''$ h) $-40{,}3°$ i) $572{,}9°$ k) $115{,}53°$
33. Berechnen Sie die Polarkoordinaten bzw. die kartesischen Koordinaten:
    a) $(x, y) = (2,2)$ b) $(-1,3)$ c) $(-2,-4)$ d) $(3,-2)$
    e) $(r, \rho) = (2, \pi)$ f) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ g) $\left(3, \frac{3}{2}\pi\right)$ h) $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$
34. Drücken Sie durch Sinuswerte aus: a) $\cos 11°$ b) $\cos 87°$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
35. Bestimmen Sie alle zu folgenden Funktionswerten gehörenden Winkel im Bereich $0 \le \alpha \le 2\pi$ (Hauptwertebereich):
    a) $\sin\alpha = 0{,}1126$ b) $\cot\alpha = 2{,}60912$ c) $\tan\alpha = 1{,}55423$ d) $\cos\alpha = -0{,}08716$

a) $\begin{cases} 6{,}47° \\ 173{,}53° \end{cases}$ b) 20,97° 200,97°

c) 57,24° 237,24° d) 95,0° 265,0°

36. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
    a) $\cos^2 x \cdot \tan^2 x + \cos^2 x$ b) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ c) $1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}$
    d) $\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}$ e) $\cos(60° + \alpha) + \sin(30° + \alpha)$
    f) $\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right] \div \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$
    g) $\tan\alpha\tan\beta + (\tan\alpha + \tan\beta)\cot(\alpha+\beta)$ h) $\frac{1-\cos^2 2x}{2 \cdot \sin x}$
37. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
    a) $\tan^2 x + 2\tan x = 1$ b) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$ c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ d) $\sin 5x - \sin x = 0$

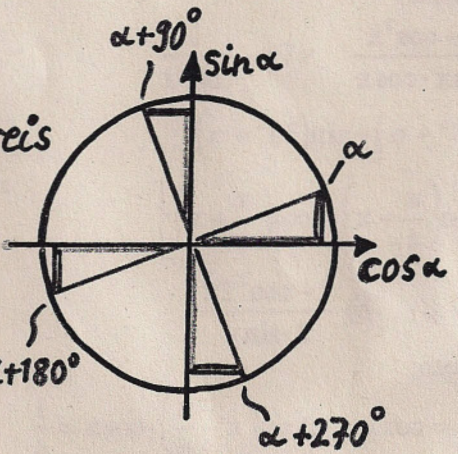
38. In dem rechtwinkligen Dreieck mit der Kathete $a = 120$ und dem Gegenwinkel $\alpha = 58°38'38''$ ist die Höhe h_c auf der Hypothenuse c zu berechnen.
39. Ein Turm erscheint aus der Entfernung 314,5m unter dem Erhebungswinkel von $7°30'$. Berechnen Sie seine Höhe unter Berücksichtigung der Instrumentenhöhe von 1,45m.
40. Der Mittelpunkt des Ziffernblattes einer Turmuhr befindet sich in h = 60m Höhe und erscheint von einem Punkt aus unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 42°10'$, sein unterer Rand erscheint unter dem Erhebungswinkel $\beta = 41°10'$. Berechnen Sie den Durchmesser des Zifferblattes.
41. Von den Endpunkten A und B einer Strecke erscheint ein dritter Punkt C unter den Winkeln $\alpha = 45°$ und $\beta = 60°$ ($\overline{AB} = 100\text{m}$). Berechnen Sie $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.
42. Von einem Dreieck sind die Seitensumme $a + b = 52\text{cm}$, der Winkel $\gamma = 60°$ und die Fläche $A = 160\sqrt{3}\text{cm}^2$ gegeben. Bekannt sei außerdem auch $a \ge b$. Wie groß sind die Seiten und die Winkel α, β des Dreiecks?
43. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
    a) $\cosh^2 x \cdot \tanh^2 x - \cosh^2 x$ b) $[1 + \sinh^2 x] \div [\sinh x \cdot \cosh x]$ c) $1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$

Beziehungen für Winkel, die sich um ganze Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ (90°) unterscheiden

$$\sin\alpha = -\cos(\alpha + 90°)$$
$$= -\sin(\alpha + 180°)$$
$$= \cos(\alpha + 270°)$$

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$$
$$= -\cos(\alpha + 180°)$$
$$= -\sin(\alpha + 270°)$$

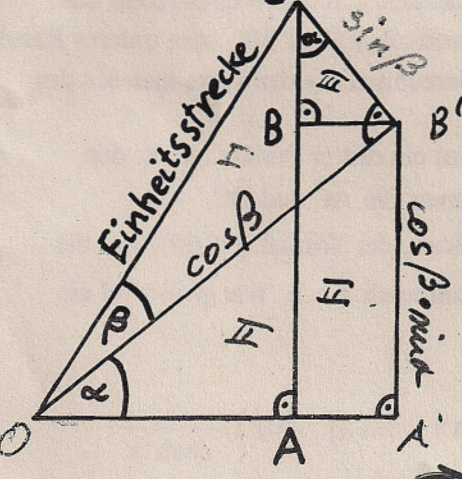
Einheitskreis



Quadranten

I	II	III	IV
sin	-cos	-sin	cos
cos	sin	-cos	-sin

Additionstheoreme



$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\cos\beta \cdot \sin\alpha = \overline{AB} \quad (\Delta I, \Delta II)$$

$$\sin\beta \cdot \cos\alpha = \overline{BC} \quad (\Delta I, \Delta III)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin$$

$\boxed{32a)}$ $0{,}03624 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot [°] = 2{,}076\ldots [°]$

b) $0{,}27110 \text{ rad} = 15{,}532\ldots [°]$

c) $1{,}55003 \text{ rad} = 88{,}810\ldots [°]$

d) $2{,}94325 \text{ rad} = 168{,}635\ldots [°]$

e) $10 \text{ rad} = 572{,}957\ldots [°]$

32 f) $38°24'30'' = \left(38 + \frac{24}{60} + \frac{30}{3600}\right)\frac{\pi}{180} = 0{,}6704\ldots \text{ rad}$

g) $164°35'18'' = 2{,}8726\ldots \text{ rad}$

h) $-40{,}3° = -0{,}7034\ldots \text{ rad}$

i) $572{,}9° = 9{,}9990\ldots \text{ rad}$

k) $115{,}53° = 2{,}0164\ldots \text{ rad}$

φ liegt im Bereich $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist also immer positiv

$\boxed{33a)}$ $(x, y) = (2, 2) \longrightarrow r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (I. Quadrant)

b') $(x, y) = (-1, \sqrt{3}) \longrightarrow r = \cancel{\sqrt{10}}\ 2$

$\tan\varphi = -\sqrt{3}$ $\qquad \varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ (II. Quadrant)

$\varphi = \pi + \arctan(-\sqrt{3})$

c) $(x, y) = (-2, -4) \longrightarrow r = 2\sqrt{5}$

$\varphi = \pi + \arctan 2 \qquad \varphi = 243{,}434\ldots\ [°]$

d) $(x, y) = (3, -2) \longrightarrow r = \sqrt{13}$

$\varphi = 2\pi + \arctan\left(\frac{-2}{3}\right) \qquad \varphi = 326{,}309\ldots\ [°]$

e) $(r, \varphi) = (2, \pi) \longrightarrow (x, y) = (-2, 0)$

f) $(r, \varphi) = (1, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (x, y) = (0, 1)$

g) $(3, \frac{3\pi}{2}) = (r, \varphi) \longrightarrow (x, y) = (0, -3)$

h) $(r, \varphi) = (1, \frac{\pi}{4}) \longrightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

---

b) $(x, y) = (-1, 3)$ $\qquad r = \sqrt{10}$

$\tan\varphi = -3$ $\qquad \varphi = 108{,}44\ldots\ [°]$

$\varphi = 180° - 71{,}565\ldots°$

Aufgabe 33. Üblich für den Polarwinkel: $\varphi \in [0, 2\pi)$.

a) bis d) "arctan" erzeugt aber Winkelwerte eines anderen Bereiches:

$$\arctan : [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \,.$$

Will man kartesische in Polarkoordinaten umrechnen, so muß man zuerst nach dem Quadranten fragen: In welchem Quadranten liegt (x,y) ? Die Antwort führt dann zur Auswahl einer von zwei Möglichkeiten für φ, die folgende (zweideutige) Gleichung festlegt:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \,.$$

a) $(x,y) = (2,2) \longrightarrow$ $\boxed{r = 2\sqrt{2} \quad \varphi = \pi/4}$ } (I. Quadrant: der einfache Fall)

b) $(x,y) = (-1,3) \longrightarrow$ $\boxed{r = \sqrt{10} \quad \varphi = 108{,}434\ldots [°]}$ } (II. Quadrant: Zum Arcus π addieren!)

$\tan \varphi = -3$

$\varphi_0 := \arctan(-3)$

$\varphi_0 = -71{,}565\ldots [°]$

$\varphi = \pi + \varphi_0$

$= (180 - 71{,}565\ldots) [°]$

c) $(x,y) = (-2,-4)$

$\varphi = \pi + \arctan(2)$ (III. Quadrant: auch: $+\pi$!)

$\longrightarrow$ $\boxed{r = 2\sqrt{5} \quad \varphi = 243{,}434\ldots [°]}$

d) $(x,y) = (3,-2)$

$\varphi = 2\pi + \arctan(-\frac{2}{3})$

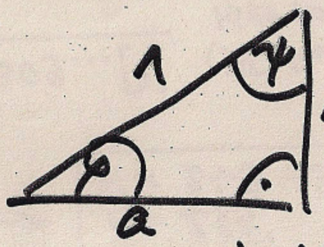
$\longrightarrow$ $\boxed{r = \sqrt{13}\,, \ \varphi = 326{,}309\ldots [°]}$ (IV. Quadrant: hier sogar: $+2\pi$!)

34a) $\cos 11^\circ = \sin 79^\circ$

$\cos 87^\circ = \sin 3^\circ$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

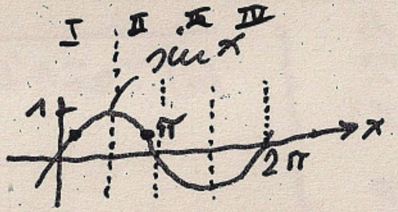


$\sin \varphi = \cos \psi$

$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$

$\alpha \in [0, 2\pi)$

35a) $\sin \alpha = 0,1126 = a$



$\alpha_0 := \arcsin a$

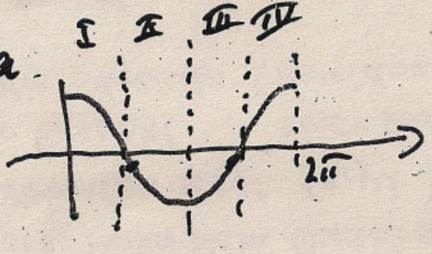
$\alpha_1 = \alpha_0$; $\alpha_2 = \pi - \alpha_0$

$\alpha_1 = 6,4652...^\circ$; $\alpha_2 = 173,5348...$

b) $\cot \alpha = 2,60912 = a$

c) $\tan \alpha = 1,55423 = a$

d) $\cos \alpha = -0,08716 = a$



<u>Aufgabe 36.</u> a) ... d): zur Anwendung des trigonometrischen Pythagoras

e)... f): zur Anwendung der Additionstheoreme. Die beiden wichtigsten lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$.

Ergebnisse:

a) $= 1$

b) $= \tan x$

c) $= -\tan^2\alpha$

d) $= 2\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 2\frac{\tan x}{\cos x}$

e) $= \cos\alpha$

f) $= \tan\alpha$

g) $= 1$

Pythagoras (allerwichtigst)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

auch allerwichtigst: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\boxed{\tan x = \frac{1}{\cot x}}$$

→ 36. a) $= \dfrac{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $= \dfrac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

c) $= \dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -\tan^2\alpha$

d) $= \dfrac{1+\sin x - (1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} = 2\,\dfrac{\tan x}{\cos x} = \dfrac{2\cdot \sin}{\cos x \cos}$

e) $= \cos 60^\circ \cos\alpha - \sin 60^\circ \sin\alpha + \sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin$

$= \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha$

$= \cos\alpha$

f) $= \dfrac{\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x - (\cos 45^\circ \cos x - \sin 45^\circ \sin x)}{\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x + \cos 45^\circ \cos x - \sin 45^\circ \sin x}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = \tan x$

g) $= \tan\alpha \tan\beta + \dfrac{(\tan\alpha + \tan\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}$

$= \tan\alpha\tan\beta + \dfrac{\cancel{(\tan\alpha + \tan\beta)}(1-\tan\alpha\tan\beta)}{\cancel{\tan\alpha + \tan\beta}}$

$= \tan\alpha\tan\beta + 1 - \tan\alpha\tan\beta$

$= 1$

h) $= \dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}(1+\cos 2x)$

$= \sin x \cdot 2 \cdot \cos^2 x = 2\sin x \cos^2 x = \sin 2x \cos x$

→ 37) a) $t = \tan x \qquad t^2 + 2t - 1 = 0$

$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$

$\tan x_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad x_1 = \frac{\pi}{8}\,,\ \frac{9\pi}{8}\ (22.5^\circ, 202.5^\circ)$

(17) $\rightarrow$ 37

a) $\tan x_2 = -1-\sqrt{2}$

$x_2 = -67{,}5^\circ ; 112{,}5^\circ \quad \left(-\frac{3}{8}\pi ; \frac{5}{8}\pi\right)$

$(+292{,}5^\circ) \quad \left(\frac{13}{8}\pi\right)$

b) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos x \neq 0\,!$

$x = 30^\circ, 210^\circ \quad \left(\frac{\pi}{6} ; \frac{7}{6}\pi\right)$

c) $\Rightarrow \left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right)\cos x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)\cos x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin x\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - (\cos 2x + 1) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$

$\cos^2 2x = (-2+\sqrt{3}\sin 2x)^2$

$\Rightarrow (1-\sin^2 2x) = 4 + 3\sin^2 2x - 4\sqrt{3}\sin 2x$

$\Rightarrow 4\sin^2 2x - 4\sqrt{3}\sin 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow t^2 - \sqrt{3}t + 3/4 = 0$

$t_{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2x = \frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi$

$x = \cancel{\frac{\pi}{6}} ; \frac{\pi}{3} \qquad$ Probe: nur $\frac{\pi}{3}$

$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 0$

$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} - \frac{\sqrt{3}\cdot 2\cdot\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{2(1+\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} = 0$

$\frac{\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3}{1+\tan^2 x} = 0$

$\frac{(\tan x - \sqrt{3})^2}{1+\tan^2 x} = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

und $\frac{4\pi}{3} \xrightarrow{?}$

d) 1) $\sin 5x = \sin x \qquad (\sin x = 0)$

$5x = x \Rightarrow x = 0 ; \pi \quad (0, 180^\circ)$

2) $\sin x \neq 0$

$16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = \sin x$

$\Rightarrow 16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5 = 1$

$\Rightarrow 16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 4 = 0$

$\Rightarrow \sin^4 x - \frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4} = 0$

$t = \sin^2 x$

37) c)

$$\underbrace{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\cos x=\frac{1}{4}$$

$$\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos x=\frac{1}{4}$$

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\cos^2 x\cdot 0{,}5=\frac{1}{4}\quad|\cdot 2$$

$$\sqrt{3}\underbrace{\sin x\cdot\cos x}_{\frac{\sin(2x)}{2}}-\overbrace{\cos^2 x}^{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{3}\cdot\frac{\sin(2x)}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)=\frac{1}{2}\quad\Big|\cdot 2$$

$$\sqrt{3}\sin(2x)-(1+\cos 2x)=\cancel{\tfrac{1}{2}}\,1$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}-\left(1+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)=1$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot 2\tan x}{1+\tan^2 x}-\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=2$$

$$\frac{2\sqrt{3}\tan x-1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=2\quad\Big|\cdot(1+\tan$$

$$2\sqrt{3}\tan x-1+\cancel{\tan^2 x}=2+\cancel{2}^{1}\tan^2 x$$

$$\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+3=0$$

37c

Subst.: $\tan x = u$

$$u^2 - 2\sqrt{3}\,u + 3 = 0$$

$$u_{1;2} = -\frac{-2\sqrt{3}}{2} \pm \underbrace{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 3}}_{0}$$

$$u_{1;2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

Rücksubst.: $\tan x = \sqrt{3}$

$$x = \text{INV} \tan \sqrt{3}$$

$$x_1 = \underline{60^\circ}$$

$$x_2 = x_1 + 180^\circ = \underline{\underline{240^\circ}}$$

Probe: $x_1 = 60^\circ$

$$\sin(60^\circ - 30^\circ) \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}$$

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$x_2 = 240^\circ$

$$\sin(240^\circ - 30^\circ) \cdot \cos 240^\circ \overset{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ = \frac{1}{4}$$

$$-0{,}5 \cdot (-0{,}5) = \frac{1}{4}$$

$$\underline{1} = \underline{1}$$

Aufgabe 37c

$$\sin\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}_{\beta}\cdot\underbrace{\cos x}_{\alpha} = \frac{1}{4} \quad |\cdot 2 \qquad ; \quad G=[0,\pi)$$

Anwendung des Additionstheorems
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin\underbrace{\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}_{\alpha+\beta} - \sin\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\alpha-\beta} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = 1$$ ← in G ist das nur an einer Stelle x gegeben

$$2x-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3}}}$$

nicht nach dem Lösungsprogramm des Skriptes

$$t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{4} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{24}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25-16}{64}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}$$

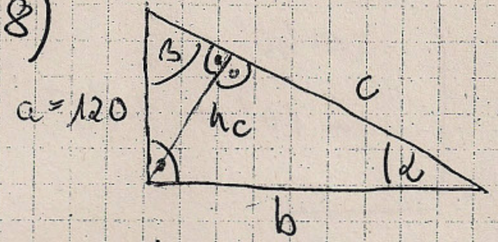
$$\sin^2 x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x_1 = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\sin^2 x_2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin x_2 = \pm \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

→ 38)



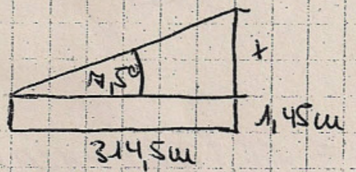
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha} = 140{,}52$$

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad b = \frac{a}{\tan\alpha} = 73{,}122$$

Alternative: nimm $\cos\alpha$

$$\frac{h_c}{a} = \sin\beta \qquad h_c = a\sin\beta = 62{,}4$$

→ 39)

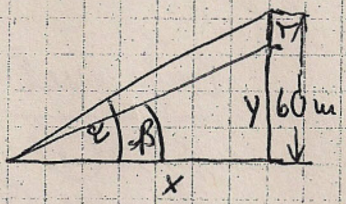


$$\frac{x}{314{,}5\,\text{m}} = \tan 7{,}5°$$

$$x = 41{,}4\,\text{m}$$

$$x_{ges} = 42{,}85\,\text{m}$$

→ 40)



$$\frac{y}{x} = \tan\beta \qquad \frac{60\,\text{m}}{x} = \tan\alpha$$

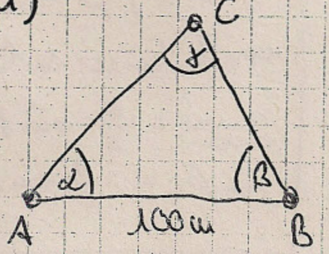
$$x = \frac{60\,\text{m}}{\tan\alpha}$$

$$y = x \cdot \tan\beta = \frac{60\,\text{m}}{\tan\alpha}\tan\beta$$

$$y = 57{,}93\,\text{m}$$

$$t = 60\,\text{m} - y = 2{,}07\,\text{m} \qquad d = 2t = 4{,}14\,\text{m}$$

→ 41)

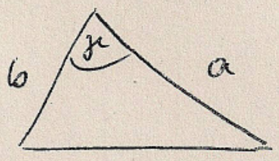


$$\alpha = 45° \quad \beta = 60° \quad \gamma = 75°$$

$$\overline{AC} = 100\,\text{m} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 89{,}66\,\text{m}$$

$$\overline{BC} = 100\,\text{m} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 73{,}2\,\text{m}$$

42) (Blatt 7) **Vorentwurf**



$$s = a + b = 52 \text{ cm} \quad ; \quad a > b$$
$$\gamma = 60^\circ$$
$$F = 160\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
$$(F = 320 \sin\gamma \text{ cm}^2)$$

I

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = F$$
$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$= s^2 - 2ab(1 + \cos\gamma)$$
$$= s^2 - \frac{4F}{\sin\gamma}(1 + \cos\gamma) \qquad s^2 - c^2 = 3ab$$
$$= s^2 - 4F\frac{3}{\sqrt{3}} = s^2 - 4F\sqrt{3} = 16(169 - 120) \text{ cm}^2$$
$$c^2 = (4 \cdot 7)^2$$
$$\boxed{c = 28 \text{ cm}}$$

Prüfe mal:
Erst II
darauf I vereinfacht

II

$$ab = \frac{2F}{\sin\gamma} =: p$$
$$a(s - a) = p$$
$$a^2 - sa + p = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2F}{\sin\gamma}}$$

$$\frac{s^2}{4} = 4 \cdot 169 \text{ cm}^2$$
$$\frac{2F}{\sin\gamma} = 4 \cdot 160 \text{ cm}^2$$

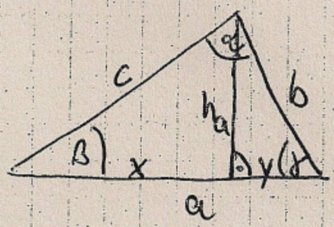
$$= (26 \pm 2 \cdot 3) \text{ cm}$$

Es fehlt noch
$\alpha = ?$, $\beta = ?$
mit Sinussatz:
$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$
$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma$

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 32 \text{ cm} \\ a_2 = 20 \ldots \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 32 \text{ cm}} \quad \boxed{b = 20 \text{ cm}}$$

(18) → 42) $a+b = 52\,cm \quad \gamma = 60° \quad a \geq b$

$A = 160\sqrt{3}\,cm^2$



$A = \frac{1}{2} a h_a$

$a = 52\,cm - b$

$h_a = b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,b$

$A = \frac{1}{2}(52cm - b) \cdot b \sin\gamma$

$A = (26cm - \frac{1}{2}b)\, b \sin\gamma$

$A = 26cm\, b \sin\gamma - \frac{1}{2} b^2 \sin\gamma$

$-\frac{A}{\frac{1}{2}\sin\gamma} = -52cm\, b + b^2$

$b^2 - 52cm\, b + \frac{2A}{\sin\gamma} = 0$

$b_{1,2} = 26m \pm \sqrt{(26cm)^2 - \frac{2 \cdot 160\sqrt{3}\,cm^2}{\sin 60°}}$

$b_{1,2} = 26cm \pm 6m$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} b_1 = 20cm \\ a_1 = 32cm \end{array}} \quad \begin{array}{l} b_2 = 32cm \\ a_2 = 20cm \end{array}$

$c^2 = x^2 + h_a^2$

$x = a - y = a - b \cdot \cos\gamma = a - b\cos 60° = a - \frac{1}{2}b = 22cm$

$c^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3}\,b)^2 = 784\,cm^2$ $\quad \underline{y = 10cm}$

$\underline{c = 28cm}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma \qquad \alpha = 81{,}8°$

$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma \qquad \beta = 38{,}2°$

→ 43)

a) $= \cosh^2 x \cdot \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \cosh^2 x = \sinh^2 x - \cosh^2 x = -1$

b) $= \frac{\cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$

c) $= \tanh^2 x$

Forts. i (anderer Weg)

$c = 28\,cm$

$s = 52\,cm$

$$ab = \underbrace{\frac{s^2 - c^2}{3}} \; ; \; ab = as - a^2$$

$$\frac{-(7\cdot 4)^2 + (13\cdot 4)^2}{3} = \frac{120\cdot 4^2}{3} = 10\cdot 4^3$$

$$= 5\cdot 2^7$$

$$a^2 - sa + \frac{s^2 - c^2}{3} = 0$$

$$a_{1,2} = 26 \pm \sqrt{\underbrace{(13^2 - 5\cdot 2^5)}_{169 - 160}\, 4}$$

$$\boxed{a_{1,2} = 26 \pm 6}$$

$160 \cdot 4$